Tentamen Fouriertheorie
22/08/07, 9.00 – 12.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 9 vraagstukken. Elk vraagstuk is 10 punten waard. Bij deelvragen staat het aantal punten tussen rechte haken. Het cijfer wordt berekend volgens

$$\text{cijfer} = 1 + \frac{\text{aantal punten}}{10}.$$

1. Geef definities van de volgende begrippen.
   (a) [5] $A \subset \mathbb{R}^m$ is een meetbare verzameling.
   (b) [5] De rij van functies $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ convergeert uniform naar de functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

2. We definiëren de rij van functies $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ door

$$f_n(x) = (4x(1-x))^n.$$

   (a) [5] Bereken $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor alle $x \in [0,1]$.
   (b) [5] Volgens welke stelling geldt dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0.$$

3. Laat zien dat een lijn in $\mathbb{R}^2$ maat nul heeft.

4. Geef een voorbeeld van een Hilbert ruimte. Noem daarbij ook het bijbehorende inproduct.

5. Formuleer de stelling van Dirichlet over convergentie van Fourierreeksen.

6. Gegeven is de 2π-periodieke functie f met

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

   (a) [6] Laat zien dat de Fourierreeks van f wordt gegeven door

$$R(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

   (b) [3] Voor welke $x \in [-\pi, \pi]$ geldt de gelijkheid $f(x) = R(x)$.
   (c) [1] Toon aan dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Zie ommezijde!

7. Beschouw de reeks
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \cos(nx).$$
Voor welke $a > 0$ convergeert deze reeks uniform op het interval $[-\pi, \pi]$?

8. Laat zien dat
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1.$$
Aanwijzing: bereken het kwadraat van de gevraagde integraal en gebruik poolcoördinaten.

9. Gegeven is de functie $f(x) = e^{-\pi x^2}$.

   (a) [5] Toon aan dat de Fouriergetransformeerde van f voldoet aan de vergelijking
   $$\frac{d}{dy}\widehat{f}(y) = -2\pi y \widehat{f}(y).$$

   (b) [5] Laat zien dat $\widehat{f}(y) = e^{-\pi y^2}$.